Espectro complementario de digrafos

Florencia Cubría

Centro Universitario Regional Noreste

Julio 2024

Contenidos

1. Teoría espectral de digrafos

2. Espectro complementario

3. Espectro complementario de digrafos

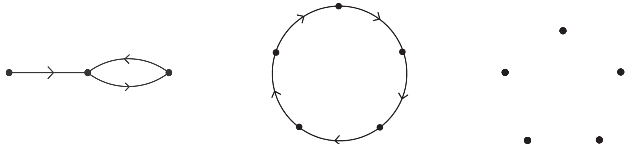
Teoría espectral de digrafos

Digrafos

Un **digrafo** D es un par (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos denominaremos **vértices** y $E \subset V \times V$ cuyos elementos denominaremos **arcos**.

Digrafos

Un **digrafo** D es un par (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos denominaremos **vértices** y $E \subset V \times V$ cuyos elementos denominaremos **arcos**.



Grafos

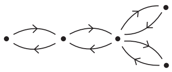
Un digrafo es **grafo** si E es simétrico, es decir,

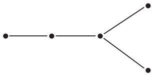
$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

Grafos

Un digrafo es **grafo** si E es simétrico, es decir,

$$(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E.$$





Grafos

Un digrafo es **grafo** si E es simétrico, es decir,

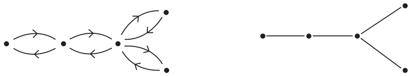
$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

En ese caso identificaremos los arcos (x, y) e (y, x) con $\{x, y\}$ que denominaremos **aristas**.

Grafos

Un digrafo es **grafo** si E es simétrico, es decir,

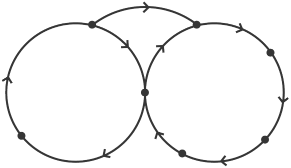
$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

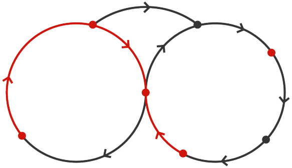


En ese caso identificaremos los arcos (x, y) e (y, x) con $\{x, y\}$ que denominaremos **aristas**.
Los grafos son un caso particular de digrafos.

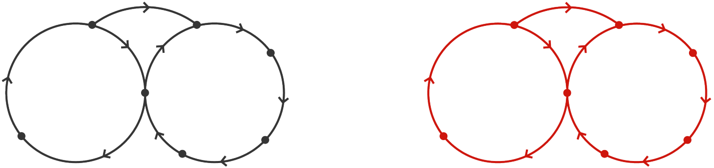
Subdigrafos

Un digrafo $D' = (V', E')$ es **subdigrafo** de $D = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.



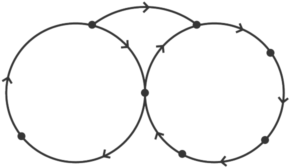


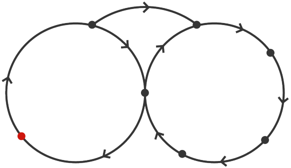
Un digrafo $D' = (V', E')$ es **subdigrafo** de $D = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.



Subdigrafos

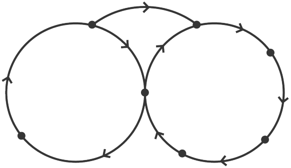
Un digrafo $D' = (V', E')$ es **subdigrafo** de $D = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.





Subdigrafos inducidos

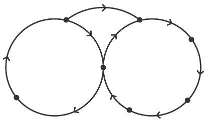
$D' = (V', E')$ es un subdigrafo **inducido** si $E' = E \cap (V' \times V')$.

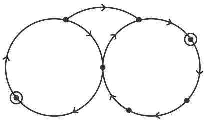


Conexión fuerte

D es **fuertemente conexo** si para dos vértices cualesquiera x e y se cumple que

- existe un camino en D de x a y,
- existe un camino en D de y a x.

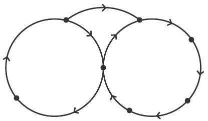


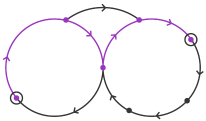


Conexión fuerte

D es **fuertemente conexo** si para dos vértices cualesquiera x e y se cumple que

- existe un camino en D de x a y,
- existe un camino en D de y a x.

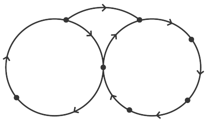


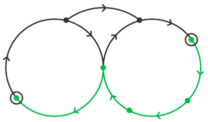


Conexión fuerte

D es **fuertemente conexo** si para dos vértices cualesquiera x e y se cumple que

- existe un camino en D de x a y,
- existe un camino en D de y a x.





Conexión fuerte

D es **fuertemente conexo** si para dos vértices cualesquiera x e y se cumple que

- existe un camino en D de x a y,
- existe un camino en D de y a x.

Conexión fuerte

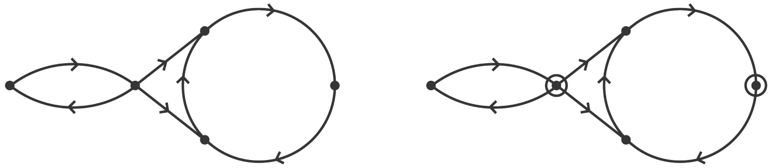
D es **fuertemente conexo** si para dos vértices cualesquiera x e y se cumple que

- existe un camino en D de x a y,
- existe un camino en D de y a x.

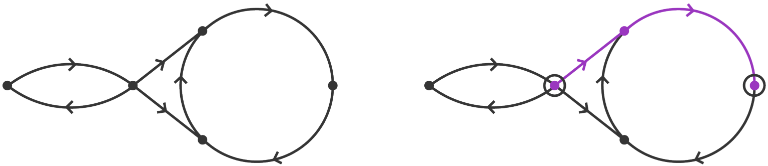
Observación

Un vértice aislado es fuertemente conexo.

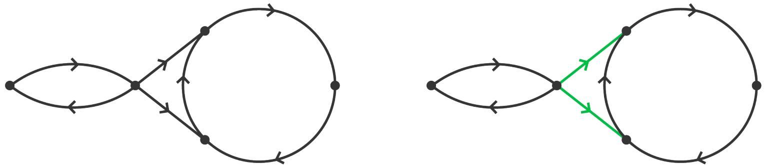
Componentes fuertemente conexas



Componentes fuertemente conexas



Componentes fuertemente conexas



Matriz de adyacencia

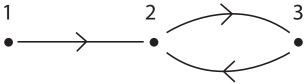
La **matriz de adyacencia** de $D = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, n\}$ es una matriz $A(D)$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad (i,j) \in E, \\ 0 & si \quad (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Matriz de adyacencia

La **matriz de adyacencia** de $D = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, n\}$ es una matriz $A(D)$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad (i,j) \in E, \\ 0 & si \quad (i,j) \notin E. \end{cases}$$



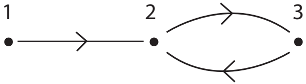
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

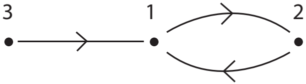
Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia depende de cómo enumeremos los vértices.

Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia depende de cómo enumeremos los vértices.





$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espectro de una matriz

A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. λ en $\mathbb{C}$ es **valor propio** de A si existe x en $\mathbb{C}^n$ no nulo tal que

$$Ax = \lambda x.$$

x se denomina **vector propio**.

Espectro de una matriz

A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. λ en $\mathbb{C}$ es **valor propio** de A si existe x en $\mathbb{C}^n$ no nulo tal que

$$Ax = \lambda x.$$

x se denomina **vector propio**.

Proposición

$$\lambda \text{ valor propio de } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0,$$

$p_A(x) = \det(xI_n - A)$ *es el **polinomio característico** de A.*

Espectro de una matriz

A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. λ en $\mathbb{C}$ es **valor propio** de A si existe x en $\mathbb{C}^n$ no nulo tal que

$$Ax = \lambda x.$$

x se denomina **vector propio**.

Proposición

$$\lambda \textit{ valor propio de } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0,$$

$p_A(x) = \det(xI_n - A)$ *es el **polinomio característico** de A.*

El **espectro** de A es el conjunto compuesto por los valores propios de la matriz, es decir, las raíces del polinomio $p_A(x)$.

$$Sp_A = [\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0] = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$$

Observación

El espectro de una matriz es invariante en la familia de matrices de adyacencia.

Espectro de un digrafo

Observación

El espectro de una matriz es invariante en la familia de matrices de adyacencia.

El **espectro del digrafo** D es el espectro de cualquiera de sus matrices de adyacencia.

$$Sp_D = Sp_{A(D)}.$$

Espectro de un digrafo

Observación

El espectro de una matriz es invariante en la familia de matrices de adyacencia.

El **espectro del digrafo** D es el espectro de cualquiera de sus matrices de adyacencia.

$$Sp_D = Sp_{A(D)}.$$

El **polinomio característico** del digrafo D es el polinomio característico de cualquiera de sus matrices de adyacencia.

$$p_D(x) = p_{A(D)}(x).$$

Espectro y estructura de un digrafo

El Teorema de Sachs establece que el polinomio $p_D(x)$ puede determinarse a partir de la estructura cíclica del digrafo.

Espectro y estructura de un digrafo

El Teorema de Sachs establece que el polinomio $p_D(x)$ puede determinarse a partir de la estructura cíclica del digrafo.

Teorema (Sachs)

$p_D(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_i x^{n-i} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$

$$a_i = \sum_{L \in \mathscr{L}_i} (-1)^{c(L)}$$

Espectro y estructura de un digrafo

El Teorema de Sachs establece que el polinomio $p_D(x)$ puede determinarse a partir de la estructura cíclica del digrafo.

Teorema (Sachs)

$p_D(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_ix^{n-i} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$

$$a_i = \sum_{L \in \mathscr{L}_i} (-1)^{c(L)}$$

Podemos describir muchas propiedades estructurales a partir del espectro.

Espectro y estructura de un digrafo

¿El espectro de un digrafo me permite describir la totalidad de su estructura?

Espectro y estructura de un digrafo

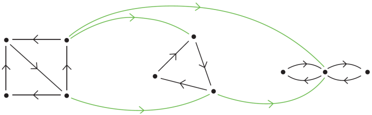
¿El espectro de un digrafo me permite describir la totalidad de su estructura?
¿El espectro de un digrafo me permite identificar de qué digrafo estoy hablando?

Espectro y estructura de un digrafo

¿El espectro de un digrafo me permite describir la totalidad de su estructura?
¿El espectro de un digrafo me permite identificar de qué digrafo estoy hablando?

$$¿Sp_D = Sp_{D'} \Rightarrow D \cong D'?$$

¿D y D' coespectrales $\Rightarrow D \cong D'$?



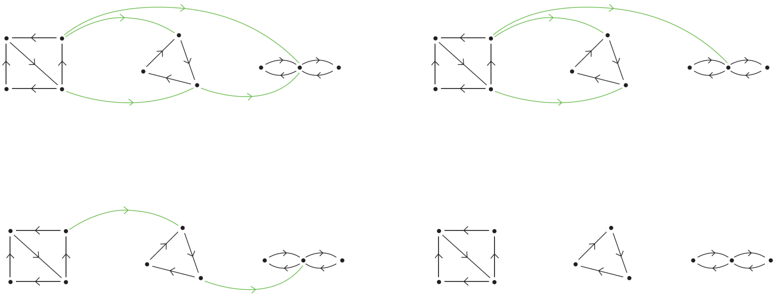
Proposición

Sea D un digrafo y $D_1, \ldots, D_k$ las componentes fuertemente conexas. Entonces,

$$Sp_D = \sqcup_{i=1}^{k} Sp_{D_i}.$$

Componentes fuertemente conexas

Fuera de las componentes fuertemente conexas el espectro “no ve”.



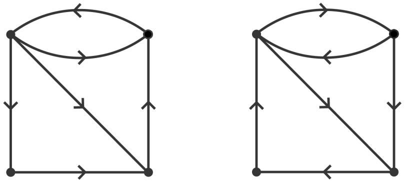
Ejemplo de Harary

Deberíamos pedir conexión fuerte.

Ejemplo de Harary

Deberíamos pedir conexión fuerte.

El siguiente ejemplo es presentado por Harary en 1971.



$$p_D(x) = x^4 - x^2 - x - 1 = p_{D'}(x)$$

Observación

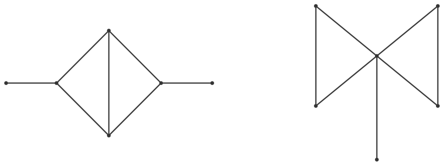
Un digrafo es grafo si y sólo si su matriz de adyacencia es simétrica.

Observación

Un digrafo es grafo si y sólo si su matriz de adyacencia es simétrica.

Contamos con muchas propiedades espectrales adicionales.

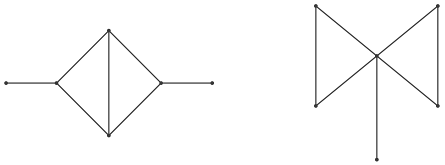
El siguientes ejemplo es presentado por Baker en 1966:



$$p_G(x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1 = p_{G'}(x)$$

Ejemplo de Baker

El siguientes ejemplo es presentado por Baker en 1966:



$$p_G(x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1 = p_{G'}(x)$$

Tenemos que los digrafos **no** quedan caracterizados por su espectro aún restrinigiéndonos al conjunto de grafos conexos.

Radio espectral

Existe un elemento destacado en el espectro de un digrafo que es el **radio espectral**

$$\rho(D) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp_D\}.$$

Su importancia viene dada por el Teorema de Perron-Frobenius que afirma que para D fuertemente conexo

- $\rho \in Sp_D$,
- ρ posee un vector propio positivo asociado,
- Si H subdigrafo de D, $H \neq D \Rightarrow \rho(H) < \rho(D)$.

Espectro complementario

Valores propios complementarios

Introducido por Seeger en 1999.

Valores propios complementarios

Introducido por Seeger en 1999.

A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio complementario** si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x \geq 0, \quad Ax \geq \lambda x \quad \text{y} \quad x^t(Ax - \lambda x) = 0.$$

Valores propios complementarios

Introducido por Seeger en 1999.

A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio complementario** si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x \geq 0, \quad Ax \geq \lambda x \quad \text{y} \quad x^t(Ax - \lambda x) = 0.$$

Dado que $x \geq 0$ y $Ax - \lambda x \geq 0$ la última condición se puede reescribir como

$$x_i = 0 \text{ ó } (Ax - \lambda x)_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Espectro complementario de una matriz

El **espectro complementario** de una matriz A es el conjunto de valores propios complementarios y se denota $\Pi(A)$.

El **espectro complementario** de una matriz A es el conjunto de valores propios complementarios y se denota $\Pi(A)$.

Observación

Al espectro complementario es invariante en la familia de matrices de adyacencia.

Espectro complementario de una matriz

El **espectro complementario** de una matriz A es el conjunto de valores propios complementarios y se denota $\Pi(A)$.

Observación

Al espectro complementario es invariante en la familia de matrices de adyacencia.

Podemos definir entonces **espectro complementario de un digrafo** como el de cualquiera de sus matrices de adyacencia.

$$\Pi(D) = \Pi(A(D)).$$

Espectro complementario de un grafo

Teorema (Fernandes, Judice, Trevisan; 2017)

Si G es un grafo conexo

$$\Pi(G) = \{\rho(F) : F \text{ subgrafo inducido}\} =$$

$$\{\rho(F) : F \text{ subgrafo inducido conexo}\}.$$

Espectro complementario de un grafo

Teorema (Fernandes, Judice, Trevisan; 2017)

Si G es un grafo conexo

$$\Pi(G) = \{\rho(F) : F \text{ subgrafo inducido}\} =$$

$$\{\rho(F) : F \text{ subgrafo inducido conexo}\}.$$

El espectro complementario reúne información espectral valiosa del grafo G y de todos sus subgrafos inducidos conexos.

Espectro complementario de un grafo

$$¿\Pi(G) = \Pi(G') \Rightarrow G \cong G'?$$

Espectro complementario de un grafo

$$¿\Pi(G) = \Pi(G') \Rightarrow G \cong G'?$$

¿G y G' complementariamente coespectrales $\Rightarrow$

$G \cong G'$?

Espectro complementario de un grafo

$$¿\Pi(G) = \Pi(G') \Rightarrow G \cong G'?$$

$$¿G \text{ y } G' \text{ complementariamente coespectrales} \Rightarrow$$

$$G \cong G'?$$

Hasta ahora no se conocen contraejemplos de grafos conexos.

Espectro complementario de digrafos

	Grafos	Digrafos
Espectro	✓✓	✓
Espectro complementario	✓	

Espectro complementario de digrafos

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

Sea D un digrafo.

$$\Pi(D) = \{\rho(H) : H \textit{ subdigrafos inducidos}\}$$

$$= \{\rho(H) : H \textit{ subdigrafos inducidos fuertemente conexos}\}.$$

Espectro complementario de un vértice aislado

Si v es un vértice aislado

$$\Pi(v) = \{\rho(v)\} = \{0\},$$

pues $\rho(v) = \rho((0)) = 0$.

Espectro complementario de un vértice aislado

Si v es un vértice aislado

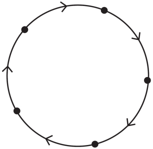
$$\Pi(v) = \{\rho(v)\} = \{0\},$$

pues $\rho(v) = \rho((0)) = 0$.

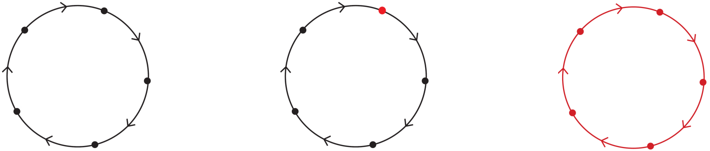
Observación

$0 \in \Pi(D)$ *para cualquier digrafo* D.

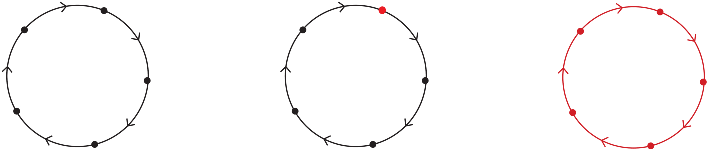
Espectro complementario de un ciclo (dirigido)



Espectro complementario de un ciclo (dirigido)

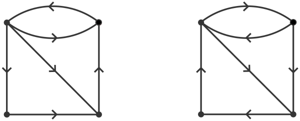


Espectro complementario de un ciclo (dirigido)



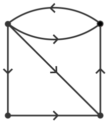
$$\Pi(\vec{C_n}) = \{\rho(v), \rho(\vec{C_n})\} = \{0, 1\}.$$

Ejemplo de Harary

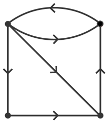


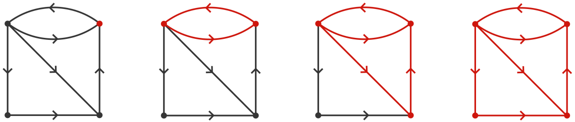
$$\Pi(D) \neq \Pi(D')$$

Ejemplo de Harary



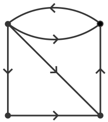
Ejemplo de Harary

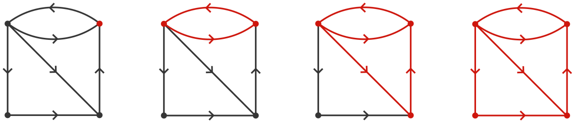




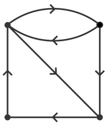
$$\#\Pi(D) = 4$$

Ejemplo de Harary

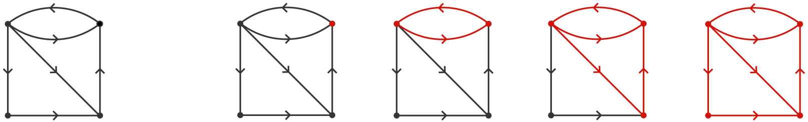




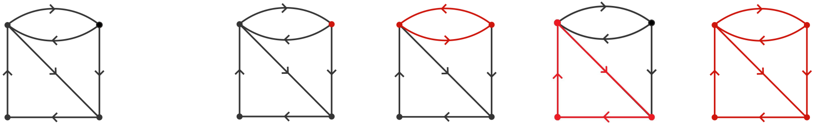
$$\#\Pi(D) = 4$$



Ejemplo de Harary

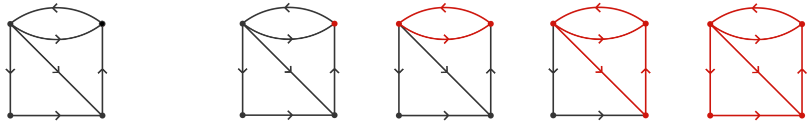


$$\#\Pi(D) = 4$$

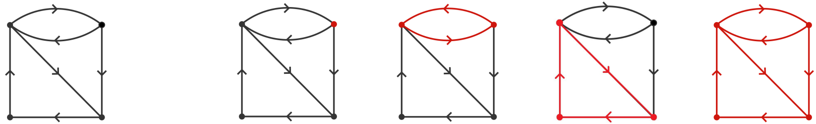


$$\rho(\vec{C_3}) = \rho(\vec{C_2}) = 1 \Rightarrow \#\Pi(D') = 3$$

Ejemplo de Harary



$$\#\Pi(D) = 4$$



$$\rho(\vec{C_3}) = \rho(\vec{C_2}) = 1 \Rightarrow \#\Pi(D') = 3$$

$$\Pi(D) \neq \Pi(D')$$

Digrafos con un único valor propio complementario

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0\}$,
2. $\#\Pi(D) = 1$,
3. *D acíclico.*

Digrafos con un único valor propio complementario

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0\}$,
2. $\#\Pi(D) = 1$,
3. *D acíclico.*

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) $0 \in \Pi(D)$.

Digrafos con un único valor propio complementario

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0\}$,
2. $\#\Pi(D) = 1$,
3. *D acíclico.*

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) $0 \in \Pi(D)$.
(1. $\Rightarrow$ 3.) Si existe un ciclo en $D \Rightarrow$ existe un ciclo inducido $\Rightarrow$
$\rho(\vec{C}_r) = 1 \in \Pi(D)$ $\lightning$.

Digrafos con un único valor propio complementario

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0\}$,
2. $\#\Pi(D) = 1$,
3. *D acíclico.*

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) $0 \in \Pi(D)$.
(1. $\Rightarrow$ 3.) Si existe un ciclo en $D \Rightarrow$ existe un ciclo inducido $\Rightarrow$ $\rho(\vec{C}_r) = 1 \in \Pi(D)$ $\lightning$.
(3. $\Rightarrow$ 1.) Si D es acíclico $\Rightarrow$ las componentes F.C. son vértices aislados $\Rightarrow \Pi(D) = \{0\}$.

Digrafos con dos valores propios complementarios

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

D fuertemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0, 1\}$,
2. $\#\Pi(D) = 2$,
3. $D = \vec{C}_n$.

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

D fuertemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0, 1\}$,
2. $\#\Pi(D) = 2$,
3. $D = \vec{C}_n$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) D F.C. $\Rightarrow$ D posee un ciclo $\Rightarrow$ D posee un ciclo inducido $\vec{C}_r$.

Digrafos con dos valores propios complementarios

Teorema (Bravo, C., Fiori, Trevisan; 2021)

D fuertemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\Pi(D) = \{0, 1\}$,
2. $\#\Pi(D) = 2$,
3. $D = \vec{C}_n$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) D F.C. $\Rightarrow$ D posee un ciclo $\Rightarrow$ D posee un ciclo inducido $\vec{C}_r$.
Si $\vec{C}_r \neq D \Rightarrow 1 = \rho(\vec{C}_r) < \rho(D)$ y $\{0, 1, \rho(D)\} \subset \Pi(D)$ $\lightning$.

¡Gracias!