Versiones de resultados clásicos de $\mathbb{R}^n$ para espacios más generales y TDA

Telmo Irineo Acosta Vellozo

30 y 31 de agosto

Universidad de la República
CENUR Noreste
Seminarios de matemáticas

Resultados clásicos de $\mathbb{R}^n$

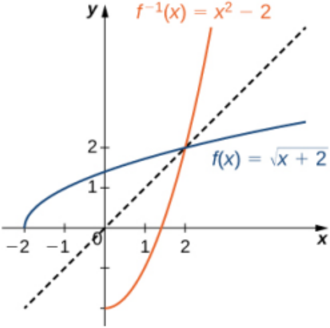
Teorema de la función inversa

Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable de clase C^k en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con $k \geq 1$, es tal que $f'(x_0)$ es invertible para un cierto $x_0 \in U$, entonces f es un difeomorfismo local de clase C^k en x_0.

Resultados clásicos de $\mathbb{R}^n$

Teorema de la función inversa

Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable de clase C^k en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con $k \geq 1$, es tal que $f'(x_0)$ es invertible para un cierto $x_0 \in U$, entonces f es un difeomorfismo local de clase C^k en x_0.



Resultados clásicos en $\mathbb{R}^n$

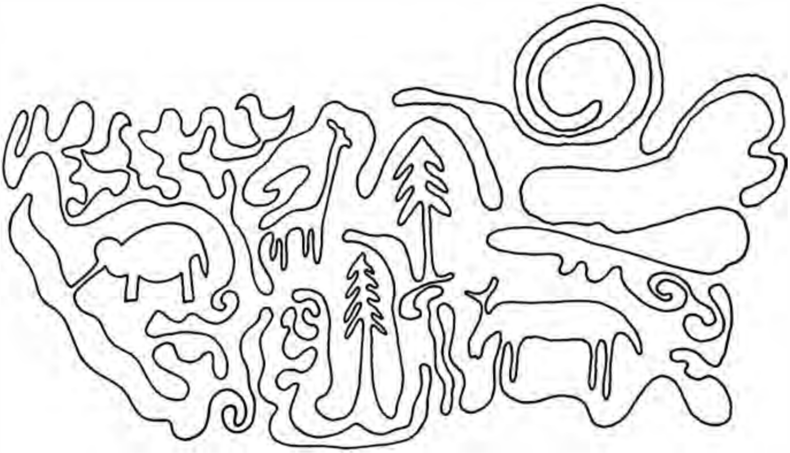
Teorema de Jordan-Brouwer

Sea $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una función continua e inyectiva. Entonces $\mathbb{R}^{n+1} - f(S^n)$ tiene dos componentes conexas.

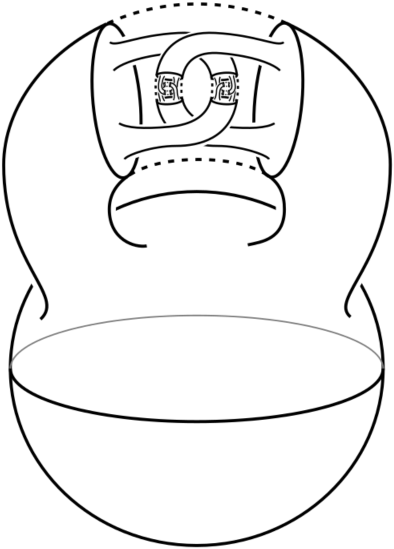
Resultados clásicos en $\mathbb{R}^n$

Teorema de Jordan-Brouwer

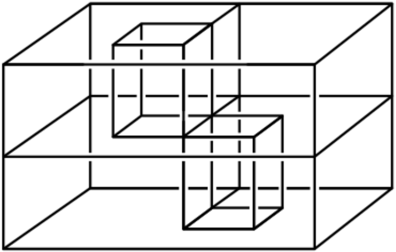
Sea $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una función continua e inyectiva. Entonces $\mathbb{R}^{n+1} - f(S^n)$ tiene dos componentes conexas.

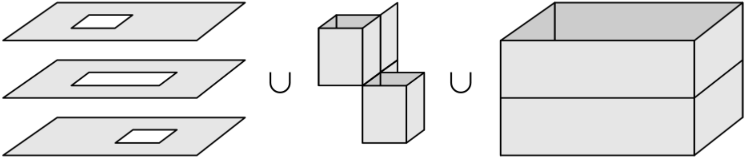


Resultados clásicos en $\mathbb{R}^n$



Resultados clásicos en $\mathbb{R}^n$





Variedades topológicas

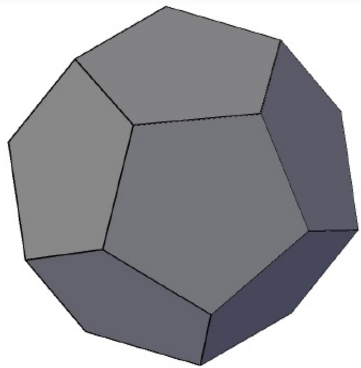
Definición

Sea M un espacio topológico Hausdorff, con una topología que tiene una base numerable. Decimos que M es una variedad topológica de dimensión m, si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p en M que es homeomorfo a un entorno de cero en $\mathbb{R}^m$.

Variedades topológicas

Definición

Sea M un espacio topológico Hausdorff, con una topología que tiene una base numerable. Decimos que M es una variedad topológica de dimensión m, si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p en M que es homeomorfo a un entorno de cero en $\mathbb{R}^m$.

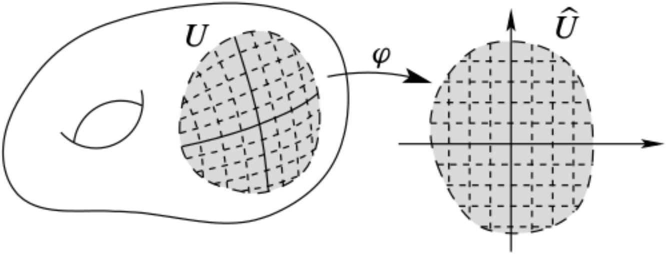


Definición

Sea M un subespacio topológico de $\mathbb{R}^n$, que es una variedad topológica. Decimos que M es una variedad diferenciable de dimensión m, si para cada $p \in M$ existe un entorno U de p en M que es difeomorfo a un entorno $\widehat{U}$ de cero en $\mathbb{R}^m$.

Definición

Sea M un subespacio topológico de $\mathbb{R}^n$, que es una variedad topológica. Decimos que M es una variedad diferenciable de dimensión m, si para cada $p \in M$ existe un entorno U de p en M que es difeomorfo a un entorno $\widehat{U}$ de cero en $\mathbb{R}^m$.



Espacio tangente

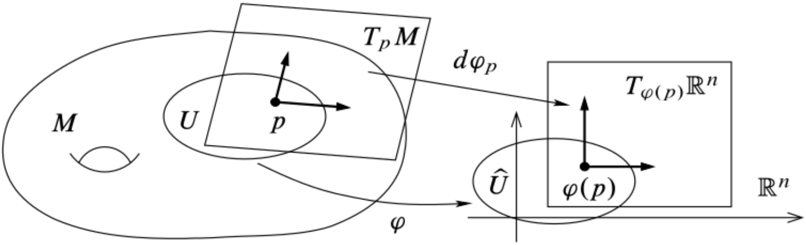
Definición

Llamamos espacio tangente asociado a un punto de una variedad diferenciable, al conjunto formado por todos los vectores tangentes a la variedad en dicho punto.

Espacio tangente

Definición

Llamamos espacio tangente asociado a un punto de una variedad diferenciable, al conjunto formado por todos los vectores tangentes a la variedad en dicho punto.



Versiones de los teoremas clásicos para variedades diferenciables

Teorema de la función inversa

Sea $f : M \to N$ una aplicación de clase C^k con $k > 0$ entre dos variedades diferenciables de igual dimensión. Si el diferencial de f en un punto $p \in M$ $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo, entonces existe un entorno U de p en M tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

Versiones de los teoremas clásicos para variedades diferenciables

Teorema de la función inversa

Sea $f : M \to N$ una aplicación de clase C^k con $k > 0$ entre dos variedades diferenciables de igual dimensión. Si el diferencial de f en un punto $p \in M$ $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo, entonces existe un entorno U de p en M tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

Teorema de Jordan-Brouwer diferenciable (Feighn, 1985)

Sea $f : X \to Y$ una inmersion de clase C^2 desde una variedad diferenciable compacta conexa de dimensión n a una variedad diferenciable conexa de dimensión $n+1$. Si $H_1(Y, \mathbb{Z}_2) = 0$, entonces $Y - f(X)$ no es conexo.

Versión topológica del Teorema de la función inversa

Teorema (Barreto, Fenille y Hartmann, 2016)

Sea $f : X \to Y$ una función continua, discreta y abierta, entre variedades topológicas orientables de dimensión n y sea $x_0 \in X$ un punto. Si $|\deg(f; x_0)| = 1$, entonces f es un homeomorfismo local en x_0.

Versión topológica del Teorema de la función inversa

Teorema (Barreto, Fenille y Hartmann, 2016)

Sea $f : X \to Y$ una función continua, discreta y abierta, entre variedades topológicas orientables de dimensión n y sea $x_0 \in X$ un punto. Si $|\deg(f; x_0)| = 1$, entonces f es un homeomorfismo local en x_0.

Teorema de la función inversa no necesariamente C^1

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si f no tiene puntos singulares, entonces f es un difeomorfismo local.

Versión topológica del Teorema de la función inversa

Teorema (Barreto, Fenille y Hartmann, 2016)

Sea $f : X \to Y$ una función continua, discreta y abierta, entre variedades topológicas orientables de dimensión n y sea $x_0 \in X$ un punto. Si $|\deg(f; x_0)| = 1$, entonces f es un homeomorfismo local en x_0.

Teorema de la función inversa no necesariamente C^1

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si f no tiene puntos singulares, entonces f es un difeomorfismo local.

Este resultado fue problado por los hermanos Radulescu en 1989.

Observación

Diferentemente de lo que ocurre en el Teorema de la función inversa para funciones de clase C^k, con $k \geq 1$, en esta versión no es suficiente exigir que la función sea no singular apenas en un punto para concluir que dicha función sea un difeomorfismo local en ese punto.

Observación

Diferentemente de lo que ocurre en el Teorema de la función inversa para funciones de clase C^k, con $k \geq 1$, en esta versión no es suficiente exigir que la función sea no singular apenas en un punto para concluir que dicha función sea un difeomorfismo local en ese punto. De hecho, considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(0) = 0 \;\text{ y }\; f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), \;\text{ para } x \neq 0.$$

Observación

Diferentemente de lo que ocurre en el Teorema de la función inversa para funciones de clase C^k, con $k \geq 1$, en esta versión no es suficiente exigir que la función sea no singular apenas en un punto para concluir que dicha función sea un difeomorfismo local en ese punto. De hecho, considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

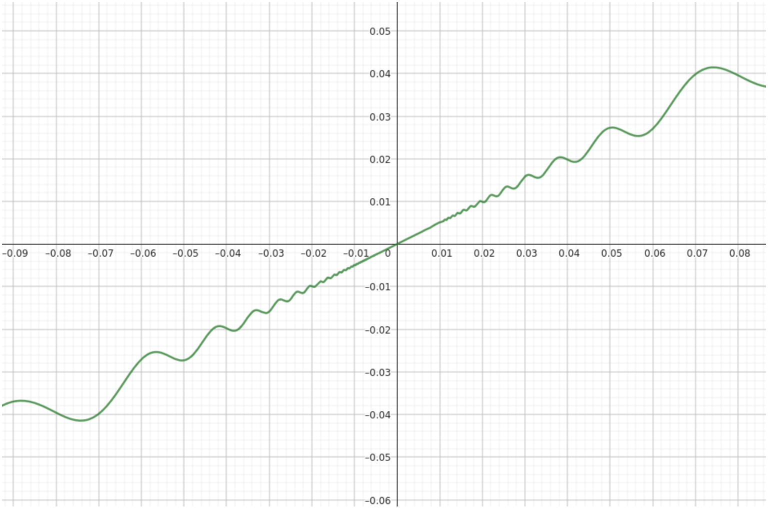
$$f(0) = 0 \ \text{ y } \ f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \text{sen}(\frac{1}{x}), \ \text{ para } x \neq 0.$$

f es diferenciable, con derivada

$$f'(0) = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \ \text{ para } \ x \neq 0.$$

$f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ en un entorno de 0, por lo tanto f es discreta en 0, también es abierta en 0, sin embargo, f no es injectiva en cualquier entorno de 0.

Grágica


0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
-0.09
-0.08
-0.07
-0.06
-0.05
-0.04
-0.03
-0.02
-0.01
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06

Ejemplo

Considere la función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(0) = 0 \;\text{ y }\; g(x) = 4x + x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), \;\text{ para }\; x \neq 0.$$

Ejemplo

Considere la función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(0) = 0 \ \text{ y } \ g(x) = 4x + x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), \ \text{ para } \ x \neq 0.$$

g es diferenciable, con derivada

$$g'(0) = 4 \ \text{ y } \ g'(x) = 4 + 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \ \text{ para } \ x \neq 0.$$

Ejemplo

Considere la función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(0) = 0 \;\text{ y }\; g(x) = 4x + x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), \;\text{ para }\; x \neq 0.$$

g es diferenciable, con derivada

$$g'(0) = 4 \;\text{ y }\; g'(x) = 4 + 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \;\text{ para }\; x \neq 0.$$

Aunque g' no sea continua en 0, se puede garantizar que g' nunca se anula. Con efecto, para todo $x \in (-1, 1) - \{0\}$, se tiene que

$$g'(x) \geq 3 + 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \geq 3 - 2x \geq 1.$$

Ejemplo

Considere la función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(0) = 0 \;\text{ y }\; g(x) = 4x + x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), \;\text{ para }\; x \neq 0.$$

g es diferenciable, con derivada

$$g'(0) = 4 \;\text{ y }\; g'(x) = 4 + 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \;\text{ para }\; x \neq 0.$$

Aunque g' no sea continua en 0, se puede garantizar que g' nunca se anula. Con efecto, para todo $x \in (-1, 1) - \{0\}$, se tiene que

$$g'(x) \geq 3 + 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \geq 3 - 2x \geq 1.$$

Consecuentemente, $g'(x) \geq 1$ para todo $x \in (-1, 1)$. Por lo tanto, el Teorema se aplica, y de el resulta que g es un difeomorfismo local en 0.

Variedades Generalizadas

Definición

Un espacio topológico localmente compacto X es una variedad generalizada de dimensión m si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. X es un ENR (retracto de un entorno euclideano), o sea, si existe un subespacio Y de algún $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a X, un entorno V de Y y una retracción $r : V \to Y$;
2. $H_*(X, X - \{x\}; R) \simeq H_*(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}; R)$ para todo $x \in X$, donde R es $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_2$.

Variedades Generalizadas

Definición

Un espacio topológico localmente compacto X es una variedad generalizada de dimensión m si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. X es un ENR (retracto de un entorno euclideano), o sea, si existe un subespacio Y de algún $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a X, un entorno V de Y y una retracción $r : V \to Y$;
2. $H_*(X, X - \{x\}; R) \simeq H_*(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}; R)$ para todo $x \in X$, donde R es $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_2$.

Teorema (Jordan-Brouwer para varidades generalizadas)

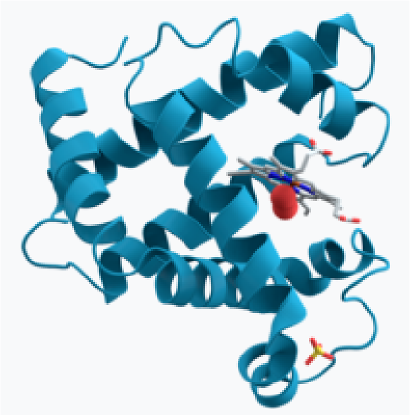
Sea $f : X \to Y$ una función continua e inyectiva desde una variedad generalizada de dimensión n compacta y conexa a una variedad generalizada de dimensión $n+1$ conexa con $H_1(Y;\mathbb{Z}_2) = 0$. Entonces el número de componentes conexas de $Y - f(X)$ es 2.

Análisis Topológico de Datos (TDA)

En TDA se aplica topología y topología algebraica para estudiar la forma de los datos y a través de eso obtener propiedades de los datos. Por ejemplo, la forma de una proteína puede determinar su función.

Análisis Topológico de Datos (TDA)

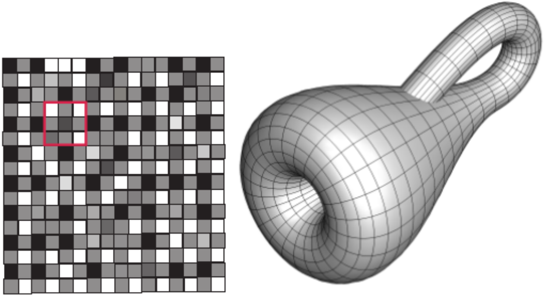
En TDA se aplica topología y topología algebraica para estudiar la forma de los datos y a través de eso obtener propiedades de los datos. Por ejemplo, la forma de una proteína puede determinar su función.



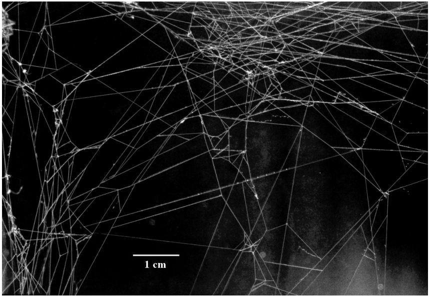
Resultado interesante usando Homología Persistente

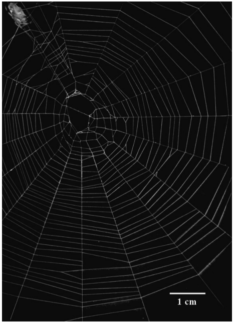
Resultado interesante usando Homología Persistente

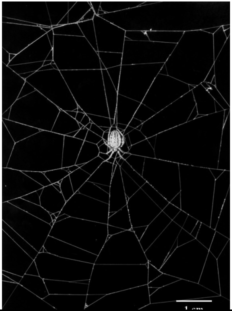
Considerando parches de $3x3$ de imagenes de paisajes digitales en blanco y negro, los cuales se pueden asumir que están en $\mathbb{R}^9$ en donde los valores en cada entrada es la intensidad entre blanco y negro. Aplicando TDA se concluyo que estos datos están cerca de una botella de Klein.

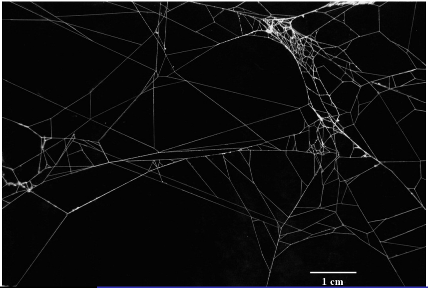


Telarañas









Bibliografía

- BRYANT, J.; FERRY, S.; MIO, W.; WEINBERGER, S. **Topology of homology manifold.** Ann. of Math., v. 143, 1996, p. 435-467.
- CARLSSON, G. **Topology and Data.** Bulletin of the American Mathematical Society, v. 46, 2009, p. 255-3082.
- LEE, J. **Introduction to Smooth Manifolds.** Springer, second edition, 2003.
- FENILLE, M. C.; VELLOZO, T. A. **Remarks on the inverse and implicit function theorems for differentiable function.** Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, v. 27, 2021.

¡Gracias!