

**Un poco de geometría para contar el número de raíces de un sistema de polinomios aleatorios**

Seminarios de Matemática

Tacuarembó - Rivera, 27 de septiembre de 2024

Federico Dalmao



DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICA Y  
ESTADÍSTICA DEL  
LITORAL

# Plan de la charla

El problema

Geometría plana (y espacial)

Subiendo las apuestas

Volviendo al problema original

# El problema

El estudio de las raíces de polinomios aleatorios comenzó en la década de 1930 con Block, Polya, Rice, Kac, etc.

En primera instancia se plantearon el problema de estudiar el **comportamiento típico** de las raíces de un polinomio

$$P_d(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d,$$

cuando el grado  $d$  crece a infinito.

La aleatoriedad se introduce en los coeficientes, es decir,  $a_k : 0 \leq k \leq d$  son variables aleatorias.

~ ¿con qué motivo?  
¿con qué distribución?

De esta forma el número de raíces

$$\mathcal{N}_d := \#\{x \in \mathbb{R} : P_d(x) = 0\}.$$

así como su ubicación, se convierten también en variables aleatorias.

El estudio de las raíces de polinomios aleatorios comenzó en la década de 1930 con Block, Polya, Rice, Kac, etc.

En primera instancia se plantearon el problema de estudiar el **comportamiento típico** de las raíces de un polinomio

$$P_d(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d,$$

cuando el grado  $d$  crece a infinito.

La aleatoriedad se introduce en los coeficientes, es decir,  $a_k : 0 \leq k \leq d$  son variables aleatorias.

↪ ¿con qué motivo?  
¿con qué distribución?

De esta forma el número de raíces

$$\mathcal{N}_d := \#\{x \in \mathbb{R} : P_d(x) = 0\}.$$

así como su ubicación, se convierten también en variables aleatorias.

El estudio de las raíces de polinomios aleatorios comenzó en la década de 1930 con Block, Polya, Rice, Kac, etc.

En primera instancia se plantearon el problema de estudiar el **comportamiento típico** de las raíces de un polinomio

$$P_d(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d,$$

cuando el grado  $d$  crece a infinito.

La aleatoriedad se introduce en los coeficientes, es decir,  $a_k : 0 \leq k \leq d$  son variables aleatorias.

↪ ¿con qué motivo?  
¿con qué distribución?

De esta forma el número de raíces

$$\mathcal{N}_d := \#\{x \in \mathbb{R} : P_d(x) = 0\}.$$

así como su ubicación, se convierten también en variables aleatorias.

Durante un buen tiempo todo se redujo a conocer el **número medio** de raíces.

## Polinomios de Kac

Si  $a_k : k \geq 0$  son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con  $\mathbb{E}(a_1) = 0$  y  $\text{Var}(a_1) = 1$ , entonces el número de raíces,  $\mathcal{N}_d$ , de

$$P_d(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d,$$

verifica

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathcal{N}_d)}{d} = \frac{2}{\pi} \log d.$$

## Polinomios de Kostlan

Si  $a_k : k \geq 0$  son variables aleatorias independientes, normales con  $\mathbb{E}(a_1) = 0$  y  $\text{Var}(a_k) = \binom{d}{k}$ , entonces el número de raíces,  $\mathcal{N}_d$ , de  $P_d$  verifica

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_d) = \sqrt{d}.$$

Hay otros modelos, pero en esencia, el número de raíces depende fuertemente de la distribución de los coeficientes.

Durante un buen tiempo todo se redujo a conocer el **número medio** de raíces.

## Polinomios de Kac

Si  $a_k : k \geq 0$  son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con  $\mathbb{E}(a_1) = 0$  y  $\text{Var}(a_1) = 1$ , entonces el número de raíces,  $\mathcal{N}_d$ , de

$$P_d(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d,$$

verifica

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathcal{N}_d)}{d} = \frac{2}{\pi} \log d.$$

## Polinomios de Kostlan

Si  $a_k : k \geq 0$  son variables aleatorias independientes, normales con  $\mathbb{E}(a_1) = 0$  y  $\text{Var}(a_k) = \binom{d}{k}$ , entonces el número de raíces,  $\mathcal{N}_d$ , de  $P_d$  verifica

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_d) = \sqrt{d}.$$

Hay otros modelos, pero en esencia, el número de raíces depende fuertemente de la distribución de los coeficientes.



En esta charla enfocamos en los sistemas de Kostlan-Shub-Smale introducidos en los 90.

## Sistemas de Kostlan-Shub-Smale

Para  $r, m \in \mathbb{N}$  con  $r \leq m$ , consideramos  $r$  polinomios homogéneos en  $m + 1$  variables

$$P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j; \quad \ell = 1, \dots, r,$$

donde hemos usado las notaciones

- ▶  $j = (j_0, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ ;  $|j| = \sum_{k=0}^m j_k$ ,
- ▶  $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ;  $x^j = \prod_{k=0}^m x_k^{j_k}$ .
- ▶  $a_j^{(\ell)} \in \mathbb{R}$ .

Las variables  $a_j^{(\ell)}$  son independientes, centradas, normales con varianzas

$$\text{Var} \left( a_j^{(\ell)} \right) = \binom{d}{j} = \frac{d!}{\prod_{k=0}^m j_k!}.$$

↪ ¿por qué homogéneos?, ¿raíces o curvas?, ¿o superficies? ↪  $r = m$  hoy.

En esta charla enfocamos en los sistemas de Kostlan-Shub-Smale introducidos en los 90.

## Sistemas de Kostlan-Shub-Smale

Para  $r, m \in \mathbb{N}$  con  $r \leq m$ , consideramos  $r$  polinomios homogéneos en  $m + 1$  variables

$$P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j; \quad \ell = 1, \dots, r,$$

donde hemos usado las notaciones

- ▶  $j = (j_0, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ ;  $|j| = \sum_{k=0}^m j_k$ ,
- ▶  $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ;  $x^j = \prod_{k=0}^m x_k^{j_k}$ .
- ▶  $a_j^{(\ell)} \in \mathbb{R}$ .

Las variables  $a_j^{(\ell)}$  son independientes, centradas, normales con varianzas

$$\text{Var} \left( a_j^{(\ell)} \right) = \binom{d}{j} = \frac{d!}{\prod_{k=0}^m j_k!}.$$

↪ ¿por qué homogéneos?, ¿raíces o curvas?, ¿o superficies? ↪  $r = m$  hoy.



Figura: El signo de un polinomio de Kostlan-Shub-Smale.

¿Por qué este modelo?

Tiene varias propiedades a destacar :

- ▶ Algebraicas. Esta distribución «es natural» porque es inducida por el producto interno euclídeo (Frobenius) de las matrices.
- ▶ Geométricas. La distribución de estos polinomios es invariante bajo la acción de isometrías en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . En particular, la distribución se reduce a la uniforme sobre la esfera.
- ▶ Probabilísticas. Hay mucha independencia, entre los polinomios y sus derivadas, entre la mayoría de las derivadas.
- ▶ Algo de suerte. Se pueden hacer muchas de las cuentas.
- ▶ Algo más de suerte. Si pedimos que la distribución sea invariante por isometrías y que los monomios sean independientes, entonces, la distribución es normal.

# Geometría plana (y espacial)

Al hablar de problemas geométricos en el plano o en el espacio no tenemos mayores inconvenientes, todo el mundo tiene cierta intuición y se imagina longitudes de segmentos o curvas, áreas o volúmenes de regiones, ángulos entre rectas, rectas perpendiculares y hasta ortogonales, proyecciones, etc.

Pero, y si hablamos de la longitud de una función, o de funciones ortogonales... Por ejemplo, podemos preguntarnos ¿son las funciones seno y coseno ortogonales entre sí?

Retrocedamos cuatro siglos para volver a la **geometría analítica** (Descartes, Fermat).

La idea es la de representar los puntos en una recta por números (reales); los del plano por pares de números (reales) y los del espacio por ternas de números (reales).

Es decir, una recta se identifica con  $\mathbb{R}$ , un plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

Esto permite tratar objetos geométricos a través de ecuaciones (algebraicas o diferenciales) y recíprocamente permite interpretar de forma geométrica objetos algebraicos.

Al hablar de problemas geométricos en el plano o en el espacio no tenemos mayores inconvenientes, todo el mundo tiene cierta intuición y se imagina longitudes de segmentos o curvas, áreas o volúmenes de regiones, ángulos entre rectas, rectas perpendiculares y hasta ortogonales, proyecciones, etc.

Pero, y si hablamos de la longitud de una función, o de funciones ortogonales... Por ejemplo, podemos preguntarnos ¿son las funciones seno y coseno ortogonales entre sí?

Retrocedamos cuatro siglos para volver a la [geometría analítica](#) (Descartes, Fermat).

La idea es la de representar los puntos en una recta por números (reales); los del plano por pares de números (reales) y los del espacio por ternas de números (reales).

Es decir, una recta se identifica con  $\mathbb{R}$ , un plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

Esto permite tratar objetos geométricos a través de ecuaciones (algebraicas o diferenciales) y recíprocamente permite interpretar de forma geométrica objetos algebraicos.

Al hablar de problemas geométricos en el plano o en el espacio no tenemos mayores inconvenientes, todo el mundo tiene cierta intuición y se imagina longitudes de segmentos o curvas, áreas o volúmenes de regiones, ángulos entre rectas, rectas perpendiculares y hasta ortogonales, proyecciones, etc.

Pero, y si hablamos de la longitud de una función, o de funciones ortogonales... Por ejemplo, podemos preguntarnos ¿son las funciones seno y coseno ortogonales entre sí?

Retrocedamos cuatro siglos para volver a la [geometría analítica](#) (Descartes, Fermat).

La idea es la de representar los puntos en una recta por números (reales); los del plano por pares de números (reales) y los del espacio por ternas de números (reales).

Es decir, una recta se identifica con  $\mathbb{R}$ , un plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

Esto permite tratar objetos geométricos a través de ecuaciones (algebraicas o diferenciales) y recíprocamente permite interpretar de forma geométrica objetos algebraicos.



Vayamos despacito y por las piedras.

Asumimos dada una unidad de longitud y asumimos válido el Teorema de Pitágoras.

(La distancia permite definir coordenadas en una recta). Sistemas de coordenadas.

La introducción de los sistemas de coordenadas permite resolver de forma analítica muchos problemas geométricos (punto medio, corte de medianas, proyecciones, distancias, áreas y volúmenes, etc).

**Cálculo de la distancia entre dos puntos.**

si  $A = (a_1, a_2)$  y  $B = (b_1, b_2)$ , entonces  $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ .

**Condición de ortogonalidad de segmentos (orientados).**

Sean además  $A' = (a'_1, a'_2)$  y  $B' = (b'_1, b'_2)$ . Los segmentos  $AB$  y  $A'B'$  son ortogonales sii

$$(b_1 - a_1)(b'_1 - a'_1) + (b_2 - a_2)(b'_2 - a'_2) = 0.$$

**Cálculo del ángulo entre dos segmentos orientados:**

Los segmentos  $AB$  y  $A'B'$  forman un ángulo cuyo coseno es

$$\frac{(b_1 - a_1)(b'_1 - a'_1) + (b_2 - a_2)(b'_2 - a'_2)}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \sqrt{(b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2}}$$

De todo esto la definición de **producto escalar**: si  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(idem en el espacio  $\mathbb{R}^3$ ).

Tenemos una descripción analítica / algebraica de la geometría en el plano y en el espacio.

En particular, estamos identificando el plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

pero... no todas las cosas en la vida son tan simples como para describirlas con dos o tres números ...

pero por otro lado,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$  ... son muy parecidos ...

De todo esto la definición de **producto escalar**: si  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(idem en el espacio  $\mathbb{R}^3$ ).

Tenemos una descripción analítica / algebraica de la geometría en el plano y en el espacio.

En particular, estamos identificando el plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

pero... no todas las cosas en la vida son tan simples como para describirlas con dos o tres números ...

pero por otro lado,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$  ... son muy parecidos ...

De todo esto la definición de **producto escalar**: si  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

(idem en el espacio  $\mathbb{R}^3$ ).

Tenemos una descripción analítica / algebraica de la geometría en el plano y en el espacio.

En particular, estamos identificando el plano con  $\mathbb{R}^2$  y el espacio con  $\mathbb{R}^3$ .

pero... no todas las cosas en la vida son tan simples como para describirlas con dos o tres números ...

pero por otro lado,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$  ... son muy parecidos ...

# Subiendo las apuestas

Podemos definir longitud (norma), distancia, ortogonalidad y hasta ángulo en  $\mathbb{R}^4$ .

Y también en  $\mathbb{R}^n$  y en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (en  $\ell^2$ ). Si  $\mathbf{x} = (x_n)_n$  y  $\mathbf{y} = (y_n)_n$ :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_n x_n y_n.$$

Esto permite introducir una geometría en estos espacios. Podemos hablar de la longitud de los vectores, del ángulo que forman, de proyecciones, etc.

Continuando con nuestra generalización, podemos definir un producto escalar para funciones integrables<sup>1</sup> sobre un intervalo  $[a, b]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

---

<sup>1</sup>continuas digamos.

Podemos definir longitud (norma), distancia, ortogonalidad y hasta ángulo en  $\mathbb{R}^4$ .

Y también en  $\mathbb{R}^n$  y en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (en  $\ell^2$ ). Si  $\mathbf{x} = (x_n)_n$  y  $\mathbf{y} = (y_n)_n$ :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_n x_n y_n.$$

Esto permite introducir una geometría en estos espacios. Podemos hablar de la longitud de los vectores, del ángulo que forman, de proyecciones, etc.

Continuando con nuestra generalización, podemos definir un producto escalar para funciones integrables<sup>1</sup> sobre un intervalo  $[a, b]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

---

<sup>1</sup>continuas digamos.

Podemos definir longitud (norma), distancia, ortogonalidad y hasta ángulo en  $\mathbb{R}^4$ .

Y también en  $\mathbb{R}^n$  y en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (en  $\ell^2$ ). Si  $\mathbf{x} = (x_n)_n$  y  $\mathbf{y} = (y_n)_n$ :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_n x_n y_n.$$

Esto permite introducir una geometría en estos espacios. Podemos hablar de la longitud de los vectores, del ángulo que forman, de proyecciones, etc.

Continuando con nuestra generalización, podemos definir un producto escalar para funciones integrables<sup>1</sup> sobre un intervalo  $[a, b]$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

---

<sup>1</sup>continuas digamos.



En  $[-\pi, \pi]$  y con una variante de este producto escalar las funciones

$$1, \operatorname{sen}(nx), \operatorname{cos}(nx); 1 \leq k$$

son ortogonales. Las **series de Fourier** «representan» a una función  $2\pi$ -periódica como una suma de senos y cosenos<sup>a</sup> :

$$S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos}(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

donde los coeficientes de Fourier son las proyecciones de  $f$  sobre los «ejes»  $1, \operatorname{sen}(nx), \operatorname{cos}(nx), k \geq 1$ . Es decir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(nx) dx,$$

y similar en los otros casos.

Un ejemplito para terminar este ejemplo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

usando la función  $f(x) = x$  y la igualdad de Parseval.

<sup>a</sup>Son una de las herramientas matemáticas más utilizadas en la práctica.

En  $[-\pi, \pi]$  y con una variante de este producto escalar las funciones

$$1, \operatorname{sen}(nx), \operatorname{cos}(nx); 1 \leq k$$

son ortogonales. Las **series de Fourier** «representan» a una función  $2\pi$ -periódica como una suma de senos y cosenos<sup>a</sup> :

$$S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos}(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

donde los coeficientes de Fourier son las proyecciones de  $f$  sobre los «ejes»  $1, \operatorname{sen}(nx), \operatorname{cos}(nx), k \geq 1$ . Es decir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(nx) dx,$$

y similar en los otros casos.

Un ejemplito para terminar este ejemplo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

usando la función  $f(x) = x$  y la igualdad de Parseval.

---

<sup>a</sup>Son una de las herramientas matemáticas más utilizadas en la práctica.

Volviendo al problema original

Recordemos que  $P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j$  con  $a_j^{(\ell)} \sim N(0, \binom{d}{j})$ .

Una cuenta directa da la covarianza de  $P_\ell$ . Para  $x, y \in \mathbb{S}^d$  vale

$$\text{Cov}(P_\ell(x), P_\ell(y)) = \mathbb{E}(P_\ell(x)P_\ell(y)) = \langle x, y \rangle^d.$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . En particular,  $\text{Var}(P_\ell(x)) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^d$ .

El espacio de las variables aleatorias normales, centradas, con varianza finita forman un espacio vectorial llamado  $L^2 = L^2\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} dx}{(2\pi)^{d/2}}\right)$  en el cual se puede considerar el producto interno<sup>2</sup>

$$X, Y \mapsto \text{Cov}(X, Y).$$

De esta forma **tenemos una geometría en este contexto**, que podemos aprovechar para descomponer el espacio en subespacios ortogonales que sean más simples de dominar.

~¿pero cómo?

<sup>2</sup>pseudo.

Recordemos que  $P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j$  con  $a_j^{(\ell)} \sim N(0, \binom{d}{j})$ .

Una cuenta directa da la covarianza de  $P_\ell$ . Para  $x, y \in \mathbb{S}^d$  vale

$$\text{Cov}(P_\ell(x), P_\ell(y)) = \mathbb{E}(P_\ell(x)P_\ell(y)) = \langle x, y \rangle^d.$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . En particular,  $\text{Var}(P_\ell(x)) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^d$ .

El espacio de las variables aleatorias normales, centradas, con varianza finita forman un espacio vectorial llamado  $L^2 = L^2\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}}{(2\pi)^{d/2}} dx\right)$  en el cual se puede considerar el producto interno<sup>2</sup>

$$X, Y \mapsto \text{Cov}(X, Y).$$

De esta forma **tenemos una geometría en este contexto**, que podemos aprovechar para descomponer el espacio en subespacios ortogonales que sean más simples de dominar.

~¿pero cómo?

<sup>2</sup>pseudo...

Recordemos que  $P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j$  con  $a_j^{(\ell)} \sim N(0, \binom{d}{j})$ .

Una cuenta directa da la covarianza de  $P_\ell$ . Para  $x, y \in \mathbb{S}^d$  vale

$$\text{Cov}(P_\ell(x), P_\ell(y)) = \mathbb{E}(P_\ell(x)P_\ell(y)) = \langle x, y \rangle^d.$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . En particular,  $\text{Var}(P_\ell(x)) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^d$ .

El espacio de las variables aleatorias normales, centradas, con varianzas finitas forman un espacio vectorial llamado  $L^2 = L^2\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}}{(2\pi)^{d/2}} dx\right)$  en el cual se puede considerar el producto interno<sup>2</sup>

$$X, Y \mapsto \text{Cov}(X, Y).$$

De esta forma [tenemos una geometría en este contexto](#), que podemos aprovechar para descomponer el espacio en subespacios ortogonales que sean más simples de dominar.

~¿pero cómo?

<sup>2</sup>pseudo...

Recordemos que  $P_\ell(x) = \sum_{|j|=d} a_j^{(\ell)} x^j$  con  $a_j^{(\ell)} \sim N(0, \binom{d}{j})$ .

Una cuenta directa da la covarianza de  $P_\ell$ . Para  $x, y \in \mathbb{S}^d$  vale

$$\text{Cov}(P_\ell(x), P_\ell(y)) = \mathbb{E}(P_\ell(x)P_\ell(y)) = \langle x, y \rangle^d.$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . En particular,  $\text{Var}(P_\ell(x)) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^d$ .

El espacio de las variables aleatorias normales, centradas, con varianza finita forman un espacio vectorial llamado  $L^2 = L^2\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}}{(2\pi)^{d/2}} dx\right)$  en el cual se puede considerar el producto interno<sup>2</sup>

$$X, Y \mapsto \text{Cov}(X, Y).$$

De esta forma [tenemos una geometría en este contexto](#), que podemos aprovechar para descomponer el espacio en subespacios ortogonales que sean más simples de dominar.

~¿pero cómo?

<sup>2</sup>pseudo...

Existe una **fórmula de conteo**, que escribo en el caso más sencillo, el de dimensión uno<sup>3</sup>,

**Fórmula de Kac - dimensión 1**

$$\mathcal{N}_d = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{[a,b]} \mathbf{I}_{\{|P(t)| < \delta\}} |P'(t)| dt.$$

Los **polinomios de Hermite** forman una base de  $L^2\left(\frac{e^{-x^2/2} dx}{\sqrt{2\pi}}\right)$ , podemos expandir:

$$\frac{1}{2\delta} \mathbf{I}_{\{|\cdot - u| < \delta\}} = \sum_{q=0}^{\infty} b_{\delta,q} H_q(\cdot), \quad \text{y} \quad |\cdot| = \sum_{q=0}^{\infty} a_q H_q(\cdot).$$

Con un poco de trabajo se deduce que

**Expansión de Hermite, o en el Caos de Wiener**

$$\mathcal{N}_d = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^q b_q a_{q-k} \int_{[a,b]} H_q(X(t)) H_{q-k}(X'(t)) dt,$$

siendo  $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $a_{2q} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^{q+1}}{2^q q! (2q-1)}$ ,  $q \geq 1$  y  $b_q = \lim_{\delta \downarrow 0} b_{\delta,q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi q!}} e^{-x^2/2} H_q(x)$ .

<sup>3</sup>En este caso la esfera se identifica con un intervalo...



Antes de seguir, presento los **polinomios de Hermite**:  $H_n : n \in \mathbb{N}$  son ortogonales respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

También se los puede definir de las siguientes maneras

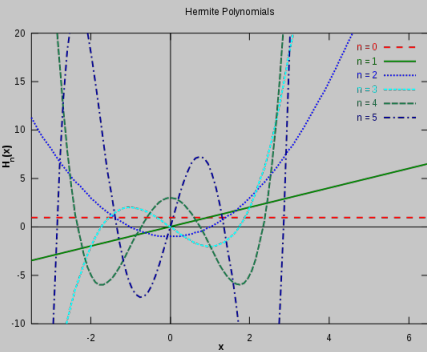
**Ecuación diferencial:**  $(e^{-x^2/2}p')' + \lambda e^{-x^2/2}p = 0.$

**Fórmula de Rodrigues:**  $H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{x^2/2}).$

**Recurrencia:**  $H_{n+1}(x) = nH_n(x) - xH_{n-1}(x), n \geq 1, H_0(x) = 1.$

**Expresión explícita:**  $H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k! 2^k (n-2k)!} x^{n-2k}.$

**Función generatriz:**  $e^{xt-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$



►  $H_0(x) = 1.$

►  $H_1(x) = x.$

►  $H_2(x) = x^2 - 1.$

►  $H_3(x) = x^3 - 3x.$

►  $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$

►  $H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15.$

►  $H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$

Esta expansión **de Hermite** —o en el **Caos de Wiener**— es conveniente para estudiar momentos y convergencia.

Pues las variables obtenidas al fijar  $q$  tienen una estructura muy particular. Por ejemplo, en el espacio generado por productos de polinomios de Hermite de grado total acotado, todas las topologías  $L^p$  y la topología de la convergencia en medida son equivalentes.

Esto hace, por ejemplo, que el clásico **método de los momentos** de **Chebyshev & Markov** se reduzca a la convergencia de dos momentos (**Teorema del cuarto momento**).

Esta expansión se adapta al caso de sistemas (multidimensional) al considerar los polinomios de Hermite tensoriales...

En general la expansión se convierte en

$$\mathcal{N}_d = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(d). \text{ O análogamente se puede escribir } L^2 = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{C}_q.$$

Las variables  $I_q(d)$  son combinaciones de integrales de productos de polinomios de Hermite cuyos grados suman  $q$ , los subespacios  $\mathcal{C}_q$  generados por ellas resultan ortogonales y convenientes, se les conoce como **caos de Wiener**.

Esta expansión **de Hermite** —o en el **Caos de Wiener**— es conveniente para estudiar momentos y convergencia.

Pues las variables obtenidas al fijar  $q$  tienen una estructura muy particular. Por ejemplo, en el espacio generado por productos de polinomios de Hermite de grado total acotado, todas las topologías  $L^p$  y la topología de la convergencia en medida son equivalentes.

Esto hace, por ejemplo, que el clásico método de los momentos de **Chebyshev & Markov** se reduzca a la convergencia de dos momentos (**Teorema del cuarto momento**).

Esta expansión se adapta al caso de sistemas (multidimensional) al considerar los polinomios de Hermite tensoriales...

En general la expansión se convierte en

$$\mathcal{N}_d = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(d). \text{ O análogamente se puede escribir } L^2 = \bigoplus_{q=0}^{\infty} C_q.$$

Las variables  $I_q(d)$  son combinaciones de integrales de productos de polinomios de Hermite cuyos grados suman  $q$ , los subespacios  $\mathcal{N}_q$  generados por ellas resultan ortogonales y convenientes, se les conoce como **caos de Wiener**.

Esta expansión **de Hermite** —o en el **Caos de Wiener**— es conveniente para estudiar momentos y convergencia.

Pues las variables obtenidas al fijar  $q$  tienen una estructura muy particular. Por ejemplo, en el espacio generado por productos de polinomios de Hermite de grado total acotado, todas las topologías  $L^p$  y la topología de la convergencia en medida son equivalentes.

Esto hace, por ejemplo, que el clásico **método de los momentos** de **Chebyshev & Markov** se reduzca a la convergencia de dos momentos (**Teorema del cuarto momento**).

Esta expansión se adapta al caso de sistemas (multidimensional) al considerar los polinomios de Hermite tensoriales...

En general la expansión se convierte en

$$\mathcal{N}_d = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(d). \text{ O análogamente se puede escribir } L^2 = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{C}_q.$$

Las variables  $I_q(d)$  son combinaciones de integrales de productos de polinomios de Hermite cuyos grados suman  $q$ , los subespacios  $\mathcal{C}_q$  generados por ellas resultan ortogonales y convenientes, se les conoce como **caos de Wiener**.

Esta expansión **de Hermite** —o en el **Caos de Wiener**— es conveniente para estudiar momentos y convergencia.

Pues las variables obtenidas al fijar  $q$  tienen una estructura muy particular. Por ejemplo, en el espacio generado por productos de polinomios de Hermite de grado total acotado, todas las topologías  $L^p$  y la topología de la convergencia en medida son equivalentes.

Esto hace, por ejemplo, que el clásico **método de los momentos** de **Chebyshev & Markov** se reduzca a la convergencia de dos momentos (**Teorema del cuarto momento**).

Esta expansión se adapta al caso de sistemas (multidimensional) al considerar los polinomios de Hermite tensoriales...

En general la expansión se convierte en

$$\mathcal{N}_d = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(d). \text{ O análogamente se puede escribir } L^2 = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{C}_q.$$

Las variables  $I_q(d)$  son combinaciones de integrales de productos de polinomios de Hermite cuyos grados suman  $q$ , los subespacios  $\mathcal{C}_q$  generados por ellas resultan ortogonales y convenientes, se les conoce como **caos de Wiener**.

Con estas herramientas, junto a

- ▶ Diego Armentano, Centro de Matemática, Facultad de Ciencias,
- ▶ Jean-Marc Azaïs, Institut de Mathematiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, Toulouse Francia
- ▶ José R. León, Instituto de Matemática y Estadística, Facultad de Ingeniería.

demostramos el siguiente teorema.

### Teorema (Armentano-Azaïs-D-León) - 2021

Sea  $P = (P_1, \dots, P_m)$  un sistema polinomial aleatorio de Kostlan-Shub-Smale de grado  $d$ . Entonces, el número de raíces  $\mathcal{N}_d$  cumple

1. existe una constante  $0 < V < \infty$  tal que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\mathcal{N}_d)}{d^{m/2}} = V.$$

2. un Teorema Central del Límite, esto es, una vez estandarizada

$$\frac{\mathcal{N}_d - \mathbb{E}(\mathcal{N}_d)}{d^{m/4}} = \frac{\mathcal{N}_d - d^{m/2}}{d^{m/4}}$$

su distribución converge hacia la normal estándar.

GRACIAS